

理系第4問

n を1以上の整数とする。

(1) $n^2 + 1$ と $5n^2 + 9$ の最大公約数 d_n を求めよ。

(2) $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ は整数の2乗にならないことを示せ。

(1)

$$n^2 + 1 = \alpha d_n, \quad 5n^2 + 9 = \beta d_n \quad (\alpha < \beta \text{ で } \alpha, \beta \text{ は互いに素})$$

$$\text{とおくと } 5n^2 + 9 - 5(n^2 + 1) = (\beta - 5\alpha) d_n$$

$\beta - 5\alpha$ と α は互いに素だから、 d_n は $5n^2 + 9 - 5(n^2 + 1) = 4$ と $n^2 + 1$ の最大公約数である。

(i) n が奇数のとき、 $n = 2k - 1$ (k は自然数) として $n^2 + 1 = 4(k^2 + k) + 2$

これは $(4 \text{ の倍数}) + 2$ なので、4 との最大公約数は **2**

(ii) n が偶数のとき、 $n^2 + 1$ は奇数なので、4 との最大公約数は **1**

(2)

$$(n^2 + 1)(5n^2 + 9) = \alpha\beta d_n^2$$

α, β は互いに素だから、 $\alpha\beta$ が平方数になるには、少なくとも α, β のどちらかが1の場合しかありえないが、 $n \geq 1$ より $n^2 + 1 > 1$ 、 $5n^2 + 9 > 9$ であることに矛盾する。よって $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ は整数の2乗にならない。

◆コメント◆

その場で考えるタイプの問題ですが、そういうのは、概して易しく、また、日本語でうまく説明できることが多いです。数式に頼りすぎないように、平易な思考を心がけるといいでしょう。