理系第 1 問

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

展開して 4 つの項に分け積分する。

【第 1 項】

$$\int_0^1 x^2dt=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

【第 2 項】

$\sqrt{1+x^2}=t$ とおくと，$dt=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ なので，

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_1^{\sqrt{2}} dt=\sqrt{2}-1$$

【第 3 項】

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2$$

【第 4 項】

$x=\tan\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$dx=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ で，

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

以上合わせて，求める値は $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{35}{12}}$

◆コメント◆

高校の定期試験レベルの平易な計算が，4 つ合わさっています。しかし，受験を意図して十分に習熟しておかないと，無駄に時間を使ってしまうでしょう。そのあたりに，学校の勉強の限界があります。ただ，本問は計算量がきわめて少なく，理系第 1 問としては例年にない易しさなので，確実に取りたいところです。