文系第１問

座標平面の原点を O とし，O，A(1，0)，B(1，1)，C(0，1) を辺の長さが 1 の正方形の頂点とする。3 点 P(p，0)，Q(0，q)，R(r，1) はそれぞれ辺 OA，OC，BC 上にあり，3 点 O，P，Q およびび 3 点 P，Q，R はどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする。

(1) q と r を p で表し，p, q, r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の最大値，最小値を求めよ・

(1)

△OPQ$=\dfrac{1}{3}$ より $pq=\dfrac{2}{3}$ $\therefore$ $\boldsymbol{q=\dfrac{2}{3p}}\cdots$①

台形 ABRP+△CQR$=\dfrac{1}{3}$ より $qr+p=\dfrac{4}{3}\cdots$②

このとき，△OPQ の面積条件から $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\leqq p\leqq 1,\ \dfrac{2}{3}\leqq q\leqq 1}$

①, ②から $\boldsymbol{r=\dfrac{3}{2}p\left(\dfrac{4}{3}-p\right)}$

$r=-\dfrac{3}{2}\left(p-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}$ と上の p の範囲から $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}\leqq r\leqq\dfrac{2}{3}}$

(2)

(1) より $f(p)=\dfrac{r}{q}=3p^2-\dfrac{9}{4}p^3$

$f'(p)=6p-\dfrac{27}{4}p^2=0$ から $p=0,\ \dfrac{8}{9}$，これと増減表（略）から，$\dfrac{2}{3}\leqq p\leqq 1$ の範囲では $p=\dfrac{8}{9}$ のとき極大かつ最大で，最大値は $f\left(\dfrac{8}{9}\right)=\boldsymbol{\dfrac{64}{81}}$

最小値は $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ または $f(1)$ であるが，それぞれ $\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$ なので，最小値は $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

◆コメント◆

素直に計算するだけです。p, q の範囲は直観的に明らかですから，2 次方程式の解の分離をするまでもないでしょう。文系第 1 問の点取り問題としては，易しいほうです。