理系第６問

座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 1, 1) を考える。$\frac{1}{2} < r < 1$ とする。点 P が線分 OA, AB, BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球 (内部を含む) が通過する部分を，それぞれ V_1, V_2, V_3 とする。

(1) 平面 $y = t$ が V_1, V_3 双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ。さらに，この範囲の t に対し，平面 $y = t$ と V_1 の共通部分および，平面 $y = t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ。

(2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ。

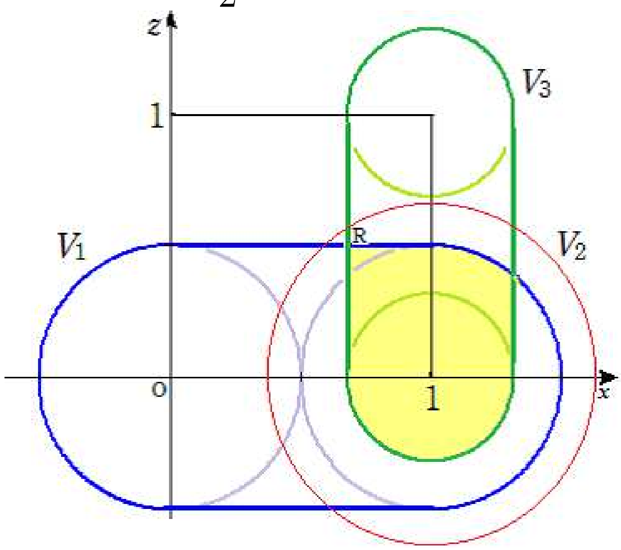
(3) r は (2) の条件をみたすとする。V_1 の体積を S とし，V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする。V_1, V_2, V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ。

(4) ひきつづき r は (2) の条件をみたすとする。S と T を求め，V の体積を決定せよ。

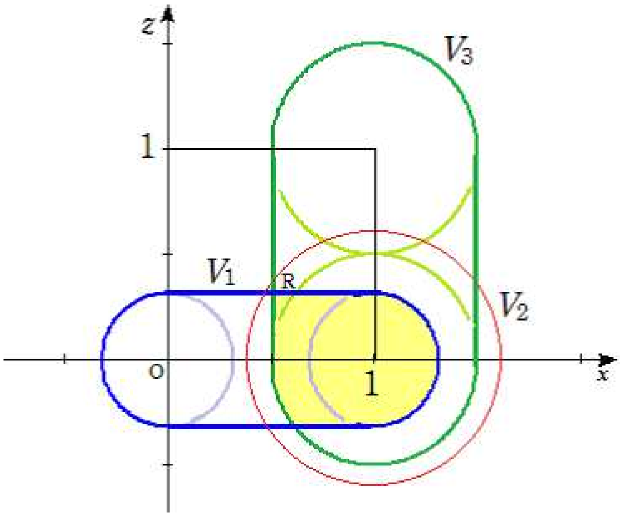
(1) 平面が V_1 と交わることから $t \leqq r$, V_3 と交わることから

$1 - r \leqq t$ ∴ $\boldsymbol{1 - r \leqq t \leqq r}$

$1 - r \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ のとき



$\frac{1}{2} \leqq t \leqq r$ のとき



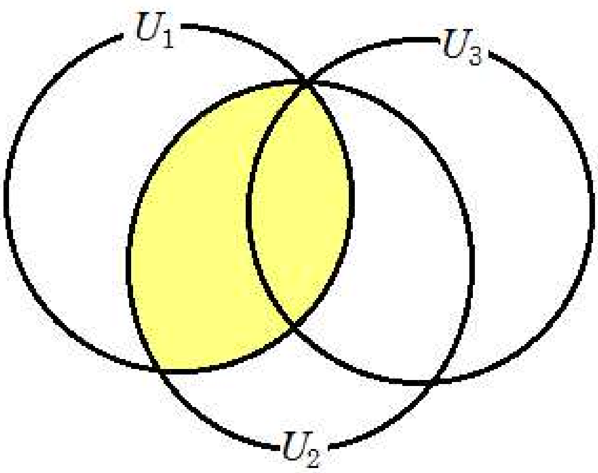
(2) (1) の図で，点 R$\left(1 - \sqrt{r^2 - (1-t)^2}, \sqrt{r^2 - t^2}\right)$ が V_2 の断面である $(1, 0)$ を中心とする半径 r の円内に入っていればいいので,

$\left\{r^2 - (1-t)^2\right\} + \left(r^2 - t^2\right) \leqq r^2 \iff r^2 \leqq 1 - 2t + 2t^2 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$,

これがすべての $1 - r \leqq t \leqq r$ で成り立てばよい。

右辺は $t = \frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{1}{2}$ をとるので, 求める条件は $r^2 \leqq \frac{1}{2} \iff \boldsymbol{\frac{1}{2} < r \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}}$

(3) 面積 S の 3 枚の紙 U_1, U_2, U_3 を，U_1, U_3 の共通部分が U_2 に含まれるように重ねてみると，U_1, U_2 の共通部分 (図の黄色い部分：面積 T), および U_3, U_2 の共通部分 (面積 T) を取り除けば全体が 1 枚で覆われる。よって $\boldsymbol{V = 3S - 2T}$



(4) S は円柱と球で，$S = \boldsymbol{\pi r^2 + \dfrac{4\pi r^3}{3}}$，$T$ は $z = k$ で切った断面を考えると，半径 $\sqrt{r^2 - k^2}$ の円の $\dfrac{3}{4}$ と 1 辺が $\sqrt{r^2 - k^2}$ の正方形なので，断面積 $D(k) = \dfrac{3}{4}\pi\left(r^2 - k^2\right) + \left(r^2 - k^2\right) = \left(\dfrac{3}{4}\pi + 1\right)\left(r^2 - k^2\right)$

$\therefore\ T = 2\displaystyle\int_0^r D(k)\,dk = \left(\pi + \dfrac{4}{3}\right) r^3$

よって $V = 3S - 2T = \boldsymbol{3\pi r^2 + 2\left(\pi - \dfrac{4}{3}\right) r^3}$

◆コメント◆

一見難しそうでありながら，誘導がきわめて親切で，非常に練られた良問です。空間図形の感覚を身につける練習問題に最適です。

◆理系数学全体コメント◆

大学入試といえば，もはや全国的にマンネリ化し，入試問題のパターンが尽きている中で，東大だけは新しい設定を出してくる独自の出題傾向を貫いています。その分，難しさは桁外れで，完全に独走状態にあります。もちろん，使うべき解法は，すべて参考書にあるものです。こんなの解けるのか，と思うような式が，美しく解決する場面も少なくありません。出題者のサービス精神を楽しみながら試験を受けることを目標にしましょう。これが面白くて東大を目指す，という人も多いはずです。全体的に，今年も超絶良問揃いでした。受験生の皆さんにとっては，いい勉強になるのではないでしょうか。