

理系第4問

$a > 0$ とし、 $f(x) = x^3 - 3a^2x$ とおく。

- (1) $x \geq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための、 a についての条件を求めよ。
 (2) 次の2条件をみたす点 (a, b) の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。

条件1: 方程式 $f(x) = b$ は相異なる3実数解をもつ。

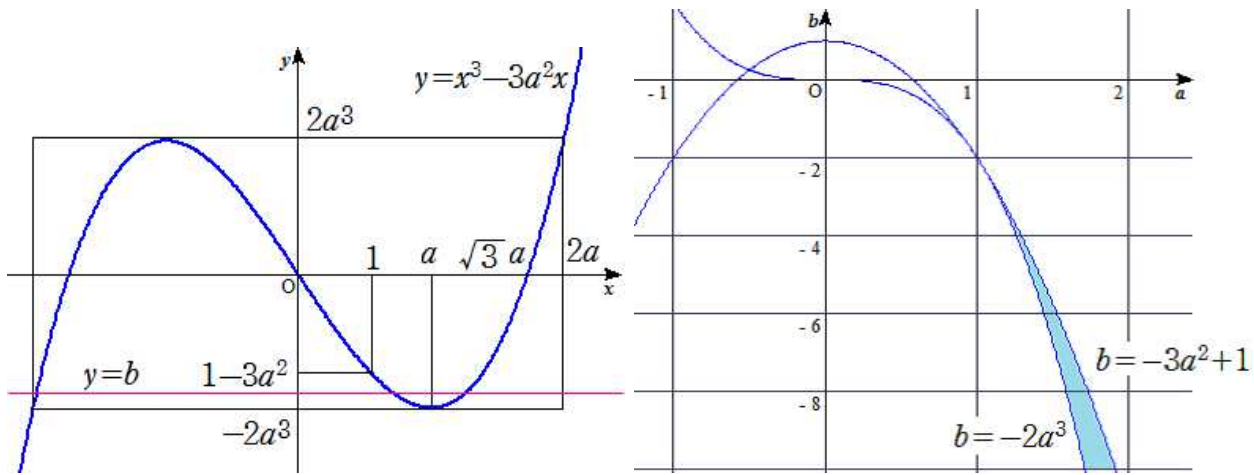
条件2: さらに、方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。

(1) $y = f(x)$ のグラフは $x = a$ で極小値をとるから、求める条件は、 $0 < a \leq 1$

(2) $\beta > 1$ となるためには、以下のグラフから、 $a > 1$ でなければならない。このとき、

図から $-2a^3 < b < 1 - 3a^2$

よって求める範囲は $-2a^3 < b < 1 - 3a^2$ ($1 < a$)



(境界を含まない)

◆コメント◆

グラフを書けば一発で、いわゆる「目で考える」問題です。これとそっくりなグラフはよく出題されます。オリジナル練習問題

<http://oran.sweethome.jp/teikyou/mset/?p=1&m=3>

のも同様のグラフを使っています。絵柄に慣れていればそれだけ格段に有利になります。