理系第３問

放物線 $y=x^2$ のうち $-1\leqq x\leqq 1$ をみたす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A(1, 0) を考える。$k>0$ を実数とする。点 P が C 上を動き，点 Q が線分 OA 上を動くとき，

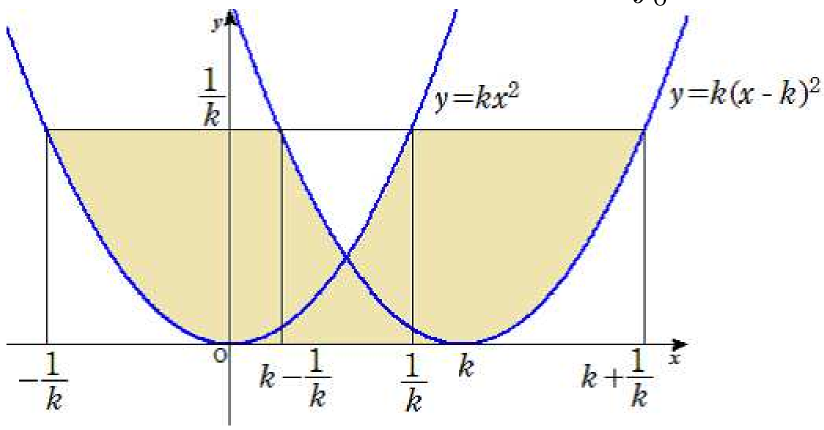
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

をみたす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。$S(k)$ および $\displaystyle\lim_{k\to+0}S(k)$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$ を求めよ。

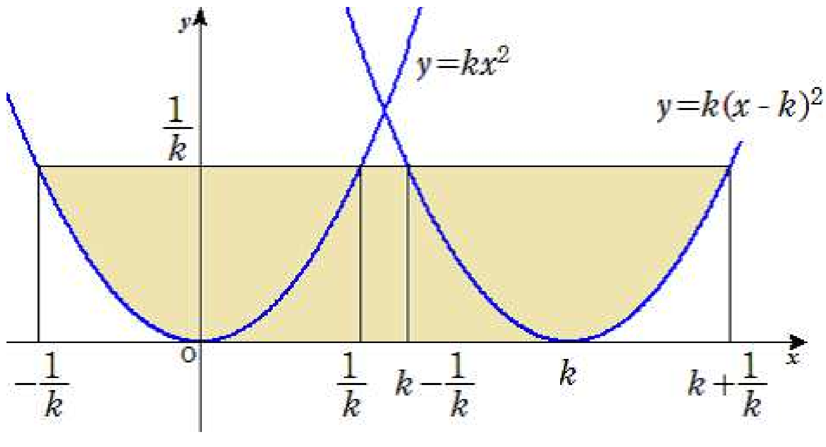
$\mathrm{P}(p,\ p^2)\ (-1\leqq p\leqq 1)$, $\mathrm{Q}(q, 0)\ (0\leqq q\leqq 1)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\left(\dfrac{p}{k}+kq,\ \dfrac{p^2}{k}\right)$

これを $(x,\ y)$ とおくと，$y=k\left(x-kq\right)^2$，これは放物線 $y=kx^2$ を x 方向に平行移動したものであり，移動距離は $0\leqq q\leqq 1$ から，最大 k となる。

(i) $0<k\leqq\sqrt{2}$ のとき，図から $S\left(k\right)=2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{k}}kdy-2\int_0^{\frac{kq}{2}}kx^2dx=\boldsymbol{2-\frac{k^4}{12}}$



(ii) $\sqrt{2}<k$ のとき，図から $S\left(k\right)=\dfrac{1}{k}\cdot\left(k+\dfrac{2}{k}\right)-\displaystyle\int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}}kx^2dx=\boldsymbol{1+\frac{4}{3k^2}}$



以上から $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{k\to+0}S\left(k\right)=2,\ \lim_{k\to\infty}S\left(k\right)=1}$

◆コメント◆

k が大きいと形が変わってしまうところを見抜くと早いです。y 方向の積分は変わって

ますが，全体的に計算自体はライトでやりやすかったはずです。基礎的なところとして，q は変化しますが，k は定数扱いなので，最後まで残ります。動く図形の問題では，何が変化する量で，何によって領域が決まるのか，というのを意識しておく必要があります。