理系第２問

数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots$ を

$$a_n = \frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で定める。

(1) $n \geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geqq 1$ と分子 $q_n$ を求めよ。

(2) $a_n$ が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ。

(1) $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{n!n!\,(n+1)!}$, $a_{n-1} = \dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!\,(n-1)!n!}$ より $R_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2\,(2n+1)}{n\,(n+1)}$，分母は偶数なので，$p_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$, $q_n = 2n+1$ としてみると，

(i) $n=2k\ (k \geqq 1)$ のとき，$p_n = k\,(2K+1)$, $q_n = 4k+1$ において $\dfrac{4k+1}{2k+1} = 1 + \dfrac{2k}{2k+1}$ は整数にはならない。$\dfrac{4k+1}{k} = 4 + \dfrac{1}{k}$ は $k \neq 1$ なら整数にならず，$k=1$ のときは $p_2 = 3,\ q_2 = 5$ となり，どちらの場合にも $p_n$ と $q_n$ は互いに素である。

(ii) $n = 2k-1\ (k \geqq 1)$ のときも同様に $p_n$ と $q_n$ は互いに素であることが示される。

よって $\boldsymbol{p_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2},\ q_n = 2n+1}$

(2) $a_n = \dfrac{q_n}{p_n}a_{n-1} = \dfrac{q_nq_{n-1}\cdots q_3q_2a_1}{p_np_{n-1}\cdots p_3p_2}$

分子は奇数のみの積なので奇数である。一方分母は $p_3=6$ が偶数である。よって $n \geqq 3$ のとき $a_n$ は整数とならない。また，$a_1=3,\ a_2=5$ より，求める $n$ は，$\boldsymbol{n = 1,\ 2}$

◆コメント◆

前の問題の誘導を，強引に使おうという意志が求められます。互いに素，を示すところは東大ではわりとよく出るので，過去問を詳しく研究しておくといいでしょう。本問も，過去問を越えるものではありませんので，東大の整数問題は，傾向をつかむよう意識するといいでしょう。